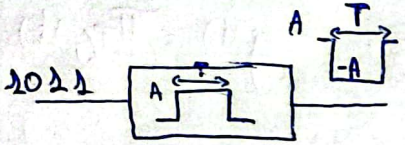
Densité spectrale de puissance

- DSP : $\gamma_{ee}(f) = \gamma_{aa}(f) \cdot |G(f)|^2$

  $\gamma_{ee}(f)$: spectre ; $\gamma_{aa}(f)$: spectre

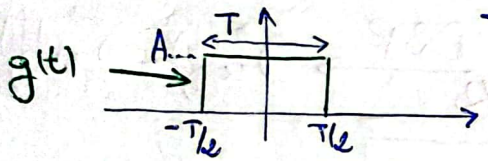
- **NRZ bipolaire :**

  0 → −1 ; 1 → 1

  DSP signal aléatoire → Autocorrélation → T.F

  $\Pi_T(t)$: fct porte

  $\gamma_{aa}(f)$? $\gamma_{ee}(f)$? $G(f)$?

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} A\, e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$= \frac{-A}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{j2\pi f\frac{T}{2}}\right]$$

$$\hookrightarrow \boxed{G(f) = AT\,\mathrm{sinc}(\Pi f T)}$$

(1)

(4)

suite

- $\gamma_{aa}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{m_a^2}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

  σ_a^2 : variance ; m_a^2 : moyenne ; δ : impulsion

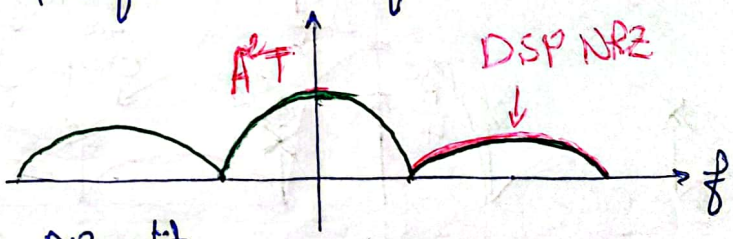
avec $a_k \in \{-1, 1\}$

- $\sigma_a^2 = \sum_i p_i a_i^2 - m_a^2$
- $m_a = \sum_i p_i a_i$

- $m_a = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$
- $\sigma_a^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times (-1)^2 = 1$

↳ $\gamma_{aa}(f) = \frac{1}{T}$ → $\gamma_{ee}(f) = \frac{1}{T} AT\,\mathrm{sinc}(\Pi f T)$

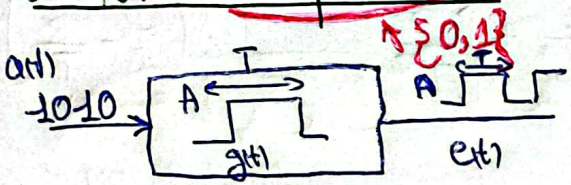
- $|G(f)|^2 = A^2 T^2\,\mathrm{sinc}^2(f\Pi T)$



☺ BP petite

☹ pas d'horloge (pas d'impulsion)

• NRZ Unipolaire :



• $G(f) = A T \,\text{sinc}(\pi f T)$

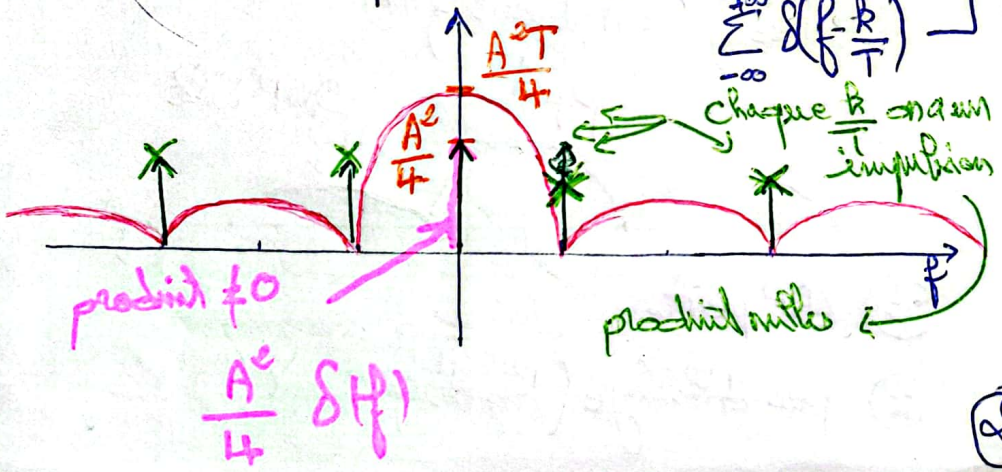
• $m_a = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$

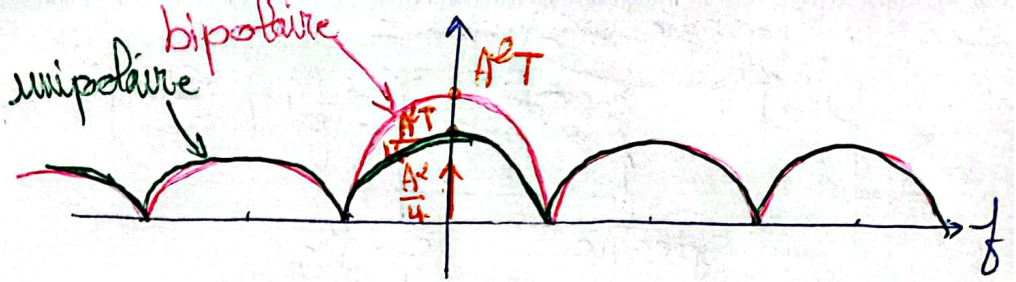
• $\sigma_a^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 0^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$

• (Si $\gamma_{aa}(f) = 0 \longrightarrow$ pas d'impulsion)

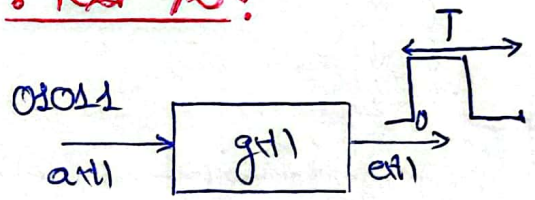
• $\gamma_{aa}(f) = \frac{1}{4T} + \frac{1}{4T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

↳ $\gamma_{ee}(f) = \frac{A^2 T}{4} \text{sinc}^2(\pi f T) + \frac{A^2}{4} \text{sinc}(\pi f T) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$





• RZ-1/2 :

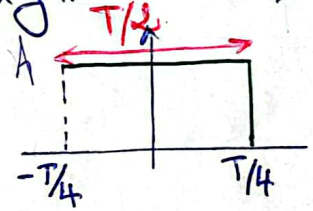


f est pour la largeur T/2

↓

$g(t) = \Pi_{T/2}(t)$

$e(t) = a(t) \times g(t) \xrightarrow{DSP} \gamma_{ee}(f) = \gamma_{aa}(f)\,|G(f)|^2$



$a_k \in \{0,1\}$ $\longrightarrow$ • $m_a = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$\int_{-T/4}^{T/4} A e^{-j2\pi ft}$ • $\sigma_a^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

↳ • $G(f) = \frac{AT}{2} \text{sinc}\left(\pi f \frac{T}{2}\right)$

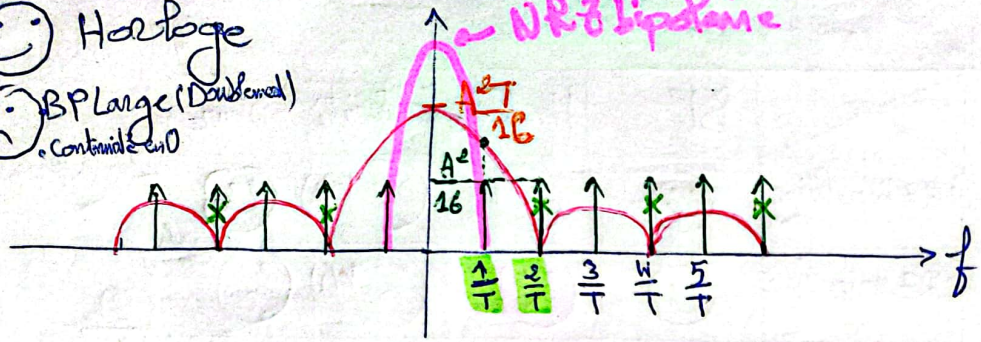
• $\gamma_{aa}(f) = \frac{1}{4T} + \frac{1}{4T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

(2) • $\gamma_{ee}(f) = \frac{A^2 T}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right) + \frac{A^2}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi f T}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

Horloge

BP Large (Double coté)

• continuité en 0



• $\text{sinc}\left(\frac{\pi f T}{2}\right) = 0$ si $\frac{\pi f T}{2} = k\pi \Rightarrow f = \frac{2k}{T}$

• $\frac{1}{T} \rightarrow \frac{2}{T}$

(car NRZ s'annule en $\frac{1}{T}$ et RZ-½ en $\frac{2}{T}$)

• Si je trouve Tescacle → on peut corriger directement

↳ (moins d'Erreur)

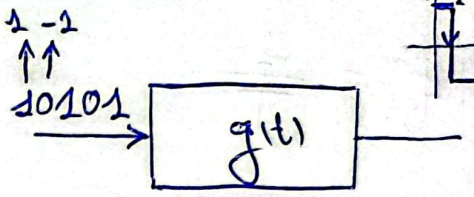
• ERREUR de Synchronisation: Avoir un horloge dans l'emetteur et le reception

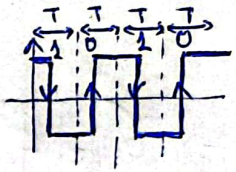
• f → impulsion

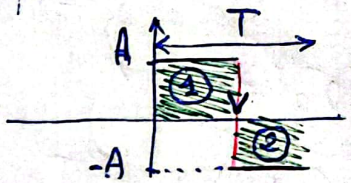
↳ $\frac{1}{f} \rightarrow T \rightarrow$ Décoder correctement

⇒ NRZ bipolaire moins d'erreurs que celle RZ-½

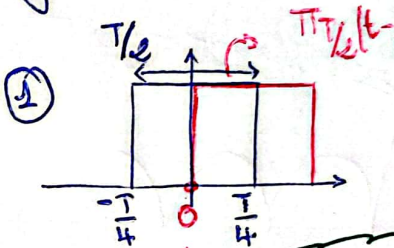
• Manchester:

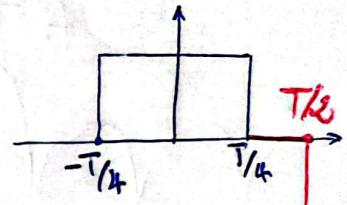






$g(t) = \Pi_{T/2}(t) + \Pi_{T/2}(t)$





↳ $g(t) = A\Pi_{T/2}(t-T/4)$ $\quad$ $g(t) = -A\,\Pi_{T/2}(t-\frac{3T}{4}$

$x * \delta = x$ donc $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

↳ $g(t) = A\,\Pi_{T/2}(t-\frac{T}{4}) - A\,\Pi_{T/2}(t-3\frac{T}{4})$

$= A\left[\Pi_{T/2}(t+\frac{T}{4}) - \Pi_{T/2}(t-\frac{T}{4})\right] * \delta(t-\frac{T}{2})$

$g(t) = A\Pi_{T/2}\left[\delta(t+\frac{T}{4}) - \delta(t-\frac{T}{4})\right] * \delta(t-$

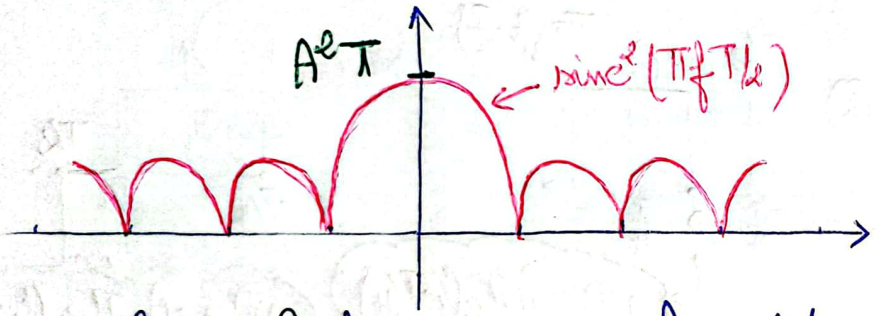
donc $G(f) = A\,TF(\Pi_{T/2}) \times \left[e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} - e^{j2\pi f\frac{T}{4}}\right] e^{j2\pi f\frac{T}{2}}$

- $|G(f)|^2 = A^2 T^2 \text{sinc}^2(\pi f T/2) \sin^2(\pi f T/2)$

- $m_a = 0$
- $\sigma_a^2 = 1$

$\Rightarrow \gamma_{aa}(f) = \frac{1}{T}$

- $\gamma_{ee}(f) = A^2 T \text{sinc}^2(\pi f T/2) \sin^2(\pi f T/2)$



- signal modulant : pour passer long distance

→ NRZ bipolaire est le moins d'erreurs.

Codage

espérance nulle

Sans mémoire
- NRZ bipolaire
- NRZ unipolaire
- RZ-$\frac{1}{2}$
- Manchester

Avec mémoire

	BP	Horloge	Continuité	Erreur
NRZ bipolaire	☺	☹	☹ (0/1)	☺
NRZ unipolaire	☺	☹	☹ (0/1)	☹
RZ-$\frac{1}{2}$	☹ (x2) Large	☺ $\frac{1}{T}$	☹ (0)	☹
Manchester	☹ (x2)	☺	☺	☺

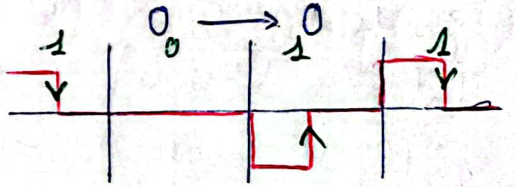
* Codage AMI (Alternative Mark Inversion)

RZ-$\frac{1}{2}$ bipolaire :

1 → ±1

0 → 0





$g(t) \longrightarrow \Pi_{T/2}(t) \xrightarrow{T.F} \frac{AT}{2} \text{sinc}(\pi f t_k)$

Autocorrélation $\xrightarrow{T.F} \gamma_{aa}(f)$

- $S_0 = +1$ $\quad \alpha_n \in \{0,1\}$ $\quad a_n \in \{-a, 0, a\}$

$$\begin{cases} a_n = a\,\alpha_n\,S_n \\ S_{n+1} = (1 - 2\alpha_n)\,S_n \end{cases}$$

↳ $S_n = (1 - 2\alpha_{n-1})\, S_{n-1}$

donc $a_n = a\,\alpha_n (1 - 2\alpha_{n-1}) S_{n-1}$ or $S_{n-1} = (1-2\alpha_{n-2}) S_{n-2}$

$= a\,\alpha_n (1 - 2\alpha_{n-1})(1 - 2\alpha_{n-2}) S_{n-2}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$R_{aa}(k) = E[a_n a_{n-k}]$$

↑ Espérance mathématique (moyenne)

- $E[\alpha_n] = \sum p_i x_i = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
- $E[1 - 2\alpha_n] = E[1] - 2E[\alpha_n] = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$
- $E[\alpha_n^2] = \sum p_i x_i^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$
- $E[(1 - 2\alpha_n)^2] = E[1] + 4E[\alpha_n^2] - 4E[\alpha_n] = 1$

Autocorrelation :

pour $k = 0$:

$E[a_n a_{n-k}] = E[a_n^2] = E[a^2 \alpha_n^2 (1-2\alpha_n)^2 \cdots\cdots S_0^2]$

$= a^2 E[\alpha_n^2] E[(1-2\alpha_n)^2] \cdots E[S_0^2]$

$= \frac{a^2}{2}$

• pour $k = \pm 1$

$$E[a_n a_{n-1}] = E[a\alpha_n(1-2\alpha_{n-1})(1-2\alpha_{n-1})\dots S_0 \; a\alpha_{n-1}(1-2\alpha_{n-2})\dots S_0]$$

$$= a^2 E[\alpha_n \alpha_{n-1}(1-2\alpha_{n-1})(1-2\alpha_{n-2})^2 \dots S_0^2]$$

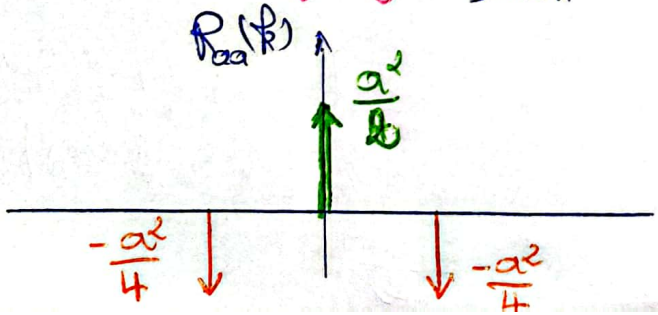
$$= a^2 E[\alpha_n]\,E[\alpha_{n-1}(1-2\alpha_{n-1})]\dots E[(1-2\alpha_{n-2})^2]$$

($E[\alpha_n] = 1/2$, $E[\alpha_{n-1}(1-2\alpha_{n-1})] = -1/2$, $E[(1-2\alpha_{n-2})^2] = 1$)

↳ $E[a_n a_{n-1}] = \frac{-a^2}{4}$

• $\forall k$: $E[a_n a_{n-k}] = 0$

Cl : $R_{aa}(k) = \begin{cases} \frac{a^2}{2} & \text{si } k=0 \\ -\frac{a^2}{4} & \text{si } k=\pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$$\gamma_{aa}(f) = TF[R_{aa}(k)]$$

• $f(t-T) \xrightarrow{T.F} e^{-j2\pi fT}$

• $f(t+T) \xrightarrow{T.F} e^{j2\pi fT}$

$$\gamma_{aa}(f) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\underbrace{\left[e^{-j2\pi fT} + e^{j2\pi fT}\right]}_{2\cos(2\pi fT)}$$

↳ $\gamma_{aa}(f) = \frac{a^2}{2}[1-\cos(2\pi fT)]$

$$\gamma_{aa}(f) = \frac{a^2}{2}\sin^2(\pi fT)$$

↳ $\gamma_{cc}(f) = A^2 \sin^2(\pi fT)\,\frac{T^2}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$

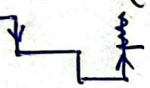
car $\Pi_{T/2}(t) \xrightarrow{T.F} \frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$

Double



• Il y a front montant + front descendant (changement d'état)

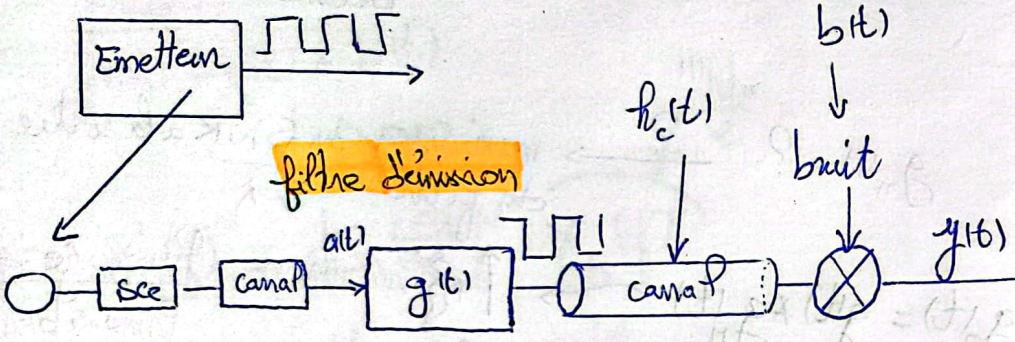
↳ Horloge



• Amélioration en continuité

Transmission en bande de base sur un canal idéal

milieu sans fil ≡ interference



$$y(t) = a(t) * g(t) * h_c(t) + b(t)$$

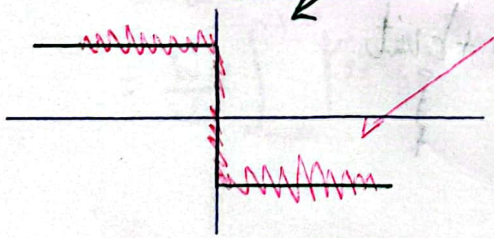
- Supposons que le canal est idéal

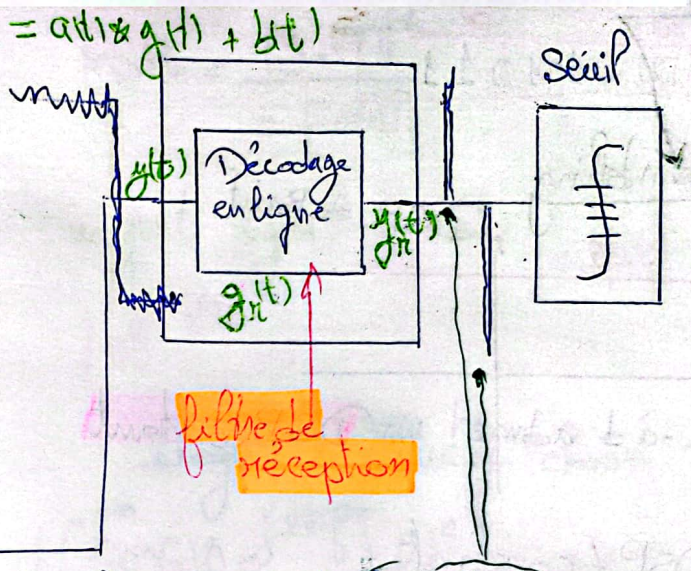
c-à-d : $h_c(t) = \delta(t)$ ↗

BP infinie ↗

- Canal idéal

$$y(t) = a(t) * g(t) + b(t)$$





(Seuil : pour connaitre les impulsions si 1 ou -1)

Signal filtré : signal passé par un filtre

Additive : tous les signal touché par le bruit

imputsive : $y_r(t) = y(t) * g_r(t)$ le bruit touche seulement partie de signal

$$= [a(t) * g(t) + b(t)] * g_r(t)$$

$$= \underbrace{a(t) * g(t) * g_r(t)}_{\text{signal filtré}} + \underbrace{b(t) * g_r(t)}_{\text{Bruit filtré}}$$

② Bruit Additif Gaussien

ENG AWGN (Additive White Gaussian Noise)

fr BBAG

aléatoire

additive

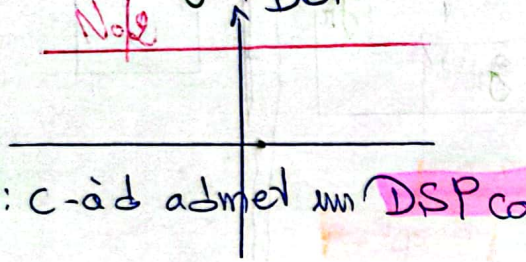
$x(t) + b(t)$

1 | 2 | 3

10101 | 0001 | 1011

Scrambling

Blanc : (white)



- signal blanc : c-à-d admet un DSP constant
  ≠
  coloré : DSP ≠ constant

calculer le signal blanc ≡ calculer le DSP cst.

- b(t) : aléatoire donc

$b(t) * g_r(t) \xrightarrow{DSP} \gamma_B(f)\,|G_r(f)|^2$ (coloré)

$\downarrow$

$\frac{N_0}{2}\,|G_r(f)|^2$ (coloré)

- blanchiement du bruit : rendre le bruit blanc

faire un filtre $\boxed{\frac{1}{|G_r(f)|^2}}$ — après le filtre — $\boxed{L}$

- on $y_r(t) = a(t) * g(t) * g_r(t) + \underbrace{b(t) * g_r(t)}_{n(t)}$ → impulsion + bruit

$y_r(t)$ initial ; $n(t)$ ← bruit

on suppose que $a_0 = 1$

donc $y_r(t) = g(t) * g_r(t) + n(t)$

(2)

- comment savoir $g_r(t)$ en maximisant SNR à la sortie du filtre ? → pour faire le bon qualité
  pour faire le bon décision

III

$g_r(t) = ?$ $\xrightarrow{?}$ maximiser du SNR à la sortie du filtre.

Puissance signal / Puissance bruit

$g_0(t) = g(t) * g_r(t)$ → impulsion

$n(t) = g_r(t) * b(t)$ → bruit

8

$g_0(t) = g(t) * g_r(t) \xrightarrow{TF} G(f)\,G_r(f) \xrightarrow{TF^{-1}}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\,G_r(f)\,e^{+j2\pi ft}\,df$

$g_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\,G_r(f)\,e^{j2\pi fT}\,df$

Puissance $\sim |g_0(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) G_1(f) e^{j\pi f T} df \right|^2$

Bruit :

$n(t) = g_1(t) * b(t)$

$\downarrow$ DSP

$\gamma_N(f) = |G_1(f)|^2 \gamma_B(f)$ avec $\gamma_B(f) = \frac{N_0}{2}$

$= \frac{N_0}{2} |G_1(f)|^2$

Puissance moyenne du signal aléatoire

DSP $\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$

$E[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_N(f) df$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |G_1(f)|^2 df$

$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(f)|^2 df$

$RSB = \frac{|g_0(T)|^2}{E[n^2(t)]} = \eta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(f) G(f) e^{j2\pi f T} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(f)|^2 df}$

$\uparrow$ rapport signal-à-bruit

$|e^{j\pi f T}| = 1$

Inégalité Cauchy-Schwarz

$\frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) G_1(f) e^{j2\pi f T} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_1(f)|^2 df}$

$\leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$

$RSB_{max} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$

Egalité si $\Phi_1(x) = k \Phi_2^*(x)$

avec $\Phi_1(x) = G_1(f)$

$\Phi_2(x) = G(f) e^{j2\pi f T}$

Egalité si $G_n(f) = k\, G^*(f)\, e^{-j2\pi f T}$

$\Phi_1(x) = G_n(f)$

$\Phi_2(x) = G(f)\, e^{j2\pi f T}$

$\Phi_1(x) = k\, \Phi_2^*(x)$

- $G_n(f) = k\, G^*(f)\, e^{-j2\pi f T}$

TF^{-1}

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k\, G^*(f)\, e^{-j2\pi f T} e^{j2\pi f t}\, df$$

$$= k \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(f)\, e^{j2\pi f (t-T)}\, df$$

$$= k \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{j2\pi f (T-t)} \right)^* df$$

$$g_n(t) = k\, g^*(T-t)$$

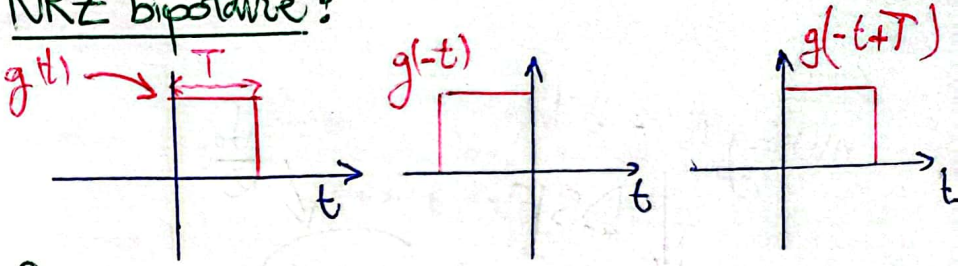
Si $g(t)$ réel :

$$g_{n\,opt}(t) = k\, g(T-t)$$

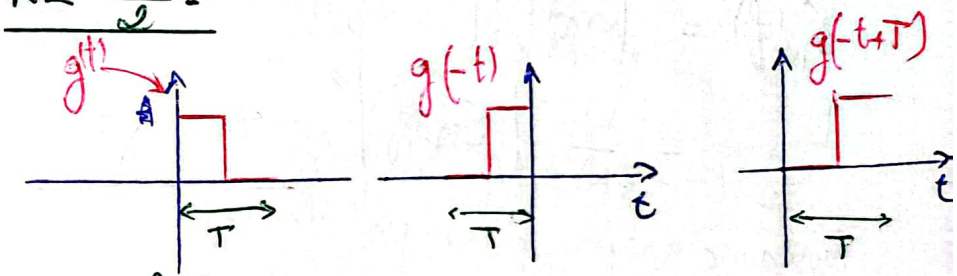
↳ filtre adapté — Matched filter — MF

- $g_n(t) = g(T-t) = g(-t+T)$

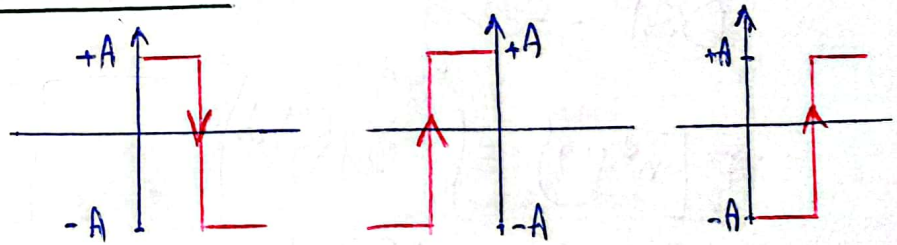
- NRZ bipolaire :



- RZ - $\frac{1}{2}$:



- Manchester :



$$g_0(t) = g_n(t) * g(t)$$

$\downarrow$ TF^{-1}

$$g_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f)\, G(f)\, e^{j2\pi fT}\, df$$

or $G^*(f) = k\, G^*(f)\, e^{-j2\pi fT}$

$$g_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} k G^*(f)\, G(f)\, df$$

$$g_0(T) = k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2\, df}_{\text{Energie}} = k\,E$$

- $E[n^2(t)] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_n(f)|^2\, df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |k\, G(f)|^2\, df$

$$= \frac{k^2 N_0}{2} \times E$$

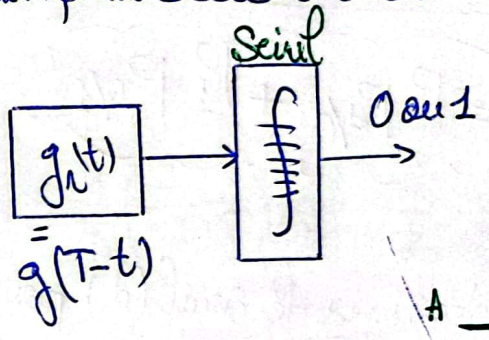
RSB après le filtre → $RSB = \frac{|g_0(T)|^2}{E[n^2(t)]} = \frac{k^2 E^2}{k^2 \frac{N_0 E}{2}} = \frac{2E_b}{N_0}$ (Energie d'un bit)

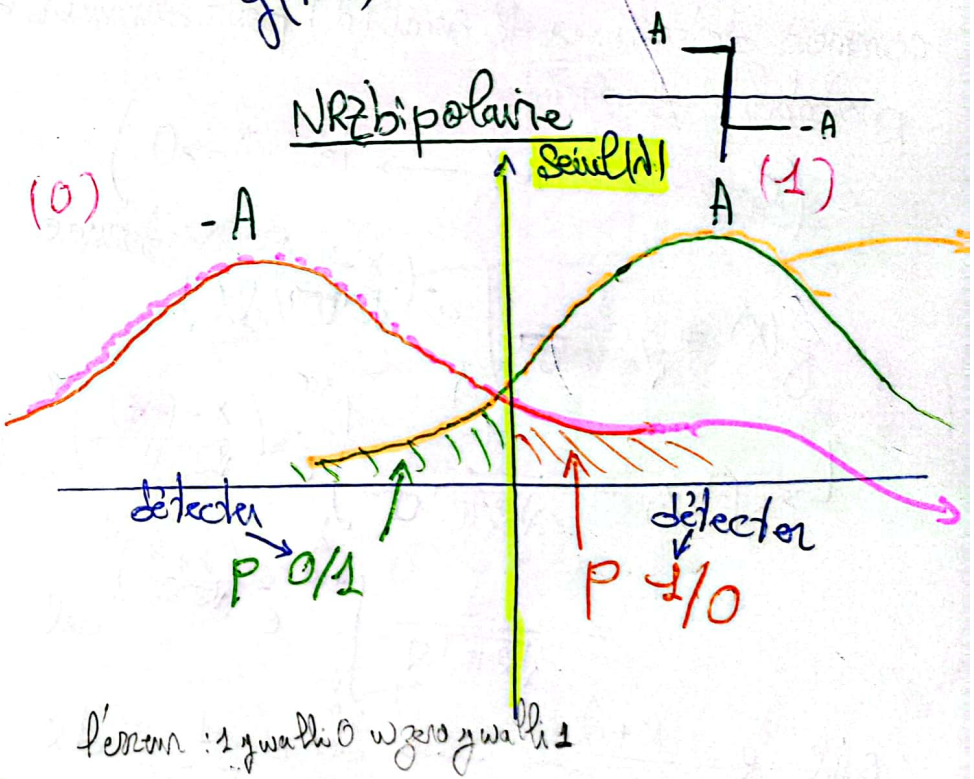
$E_B = P_B T$

$P_B = A^2$ ← Amplitude

$$g_n(t) = k\, g(-t+T) \rightsquigarrow RSB_{max} = \frac{2E_b}{N_0}$$

Seuil : pour décider ce bit c'est un 0 ou 1





P_1 : probabilité (1) → détecté

P_0 : probabilité (0) qui détecte

Probabilité d'erreur P_e :

$$P_e = P_0 P_{1/0} + P_1 P_{0/1}$$

comment déterminer le seuil (λ) pour diminuer la probabilité d'erreur

(C-à-d : λ ? $\longrightarrow$ $P_e \searrow \to 0$)

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int e^{-\left(\frac{x-m_a}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$) donnée

$\hookrightarrow P_{1/0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-(-A)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x+A}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$

soit $z = \frac{x+A}{\sqrt{2}\sigma} \longrightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$

$dx = \sqrt{2}\sigma\, dz$

donc $P_{1/0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{\lambda+A}{\sqrt{2}\sigma}}^{+\infty} e^{-z^2} \sqrt{2}\sigma\, dz$

$P_{1/0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda+A}{\sqrt{2}\sigma}}^{+\infty} e^{-z^2} dz$

or $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-z^2} dz$) donnée

donc $\boxed{P_{1/0} = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$

$\hookrightarrow P_{0/1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\left(\frac{A-x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$

soit $z = \frac{A-x}{\sqrt{2}\sigma} \longrightarrow dz = \frac{-1}{\sqrt{2}\sigma} dx$

$dx = -\sqrt{2}\sigma\, dz$

$P_{0/1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}}^{+\infty} e^{-z^2} dz$

donc $\boxed{P_{0/1} = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$

on cherche la valeur de λ pour $\frac{dP_e}{d\lambda} = 0$

$\frac{d\,erfc(u)}{du} = \left[e^{-u^2} u'\right] \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$) donnée

donc $\frac{dP_e}{d\lambda} = \frac{P_0}{2}\left[e^{-\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]$

$+ \frac{P_1}{2}\left[e^{-\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} \times \frac{(-1)}{\sqrt{2}\sigma} \times \frac{-2}{\sqrt{\pi}}\right] = 0$

$\Rightarrow P_0\, e^{-\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} = P_1\, e^{-\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$

$\frac{P_0}{P_1}\, e^{-\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} = e^{-\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$

$\frac{P_0}{P_1} = e^{\frac{-(A+\lambda)^2 + (A+\lambda)^2}{\sqrt{2}\sigma^2}}$

$\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_b}$

$Ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = \frac{2A\lambda}{\sigma^2}$

$\lambda_{opt} = \frac{\sigma^2}{2A} Ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right)$

si $P_1 = P_0 = \frac{1}{2}$ $\quad \lambda_{opt} = 0$

$P_e = P_1 P_{0/1} + P_0 P_{1/0}$

$P_e = \frac{P_0}{2} erfc\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{P_1}{2} erfc\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

- si équiprobables $P_1 = P_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow \lambda = 0$

$P_e = \frac{1}{4} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{4} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

↳ $P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

- Relation entre $erfc(x)$ et $Q(x)$: donnée

$erfc(x) = 2Q(\sqrt{2}x)$

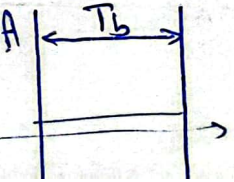
$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) \longrightarrow Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$

avec $\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_b}$

- Energie bit

$E_b = P_{Bit} \times T_b$

$= A^2 T_b$



$E_b = A^2 T_b$

donc $A = \sqrt{\frac{E_b}{T_b}}$ $\quad E_b = A^2 T_b$

$\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_b} \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2T_b}}$

$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\frac{E_b}{T_b}}{\frac{N_0}{2T_b}}}\right)$

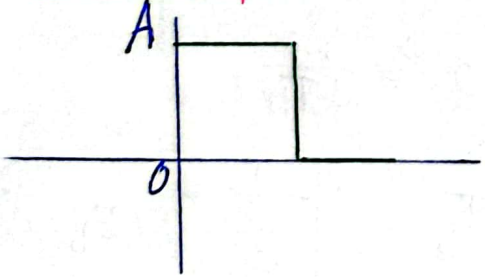
$P_{e\ NRZ\ bipolaire} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

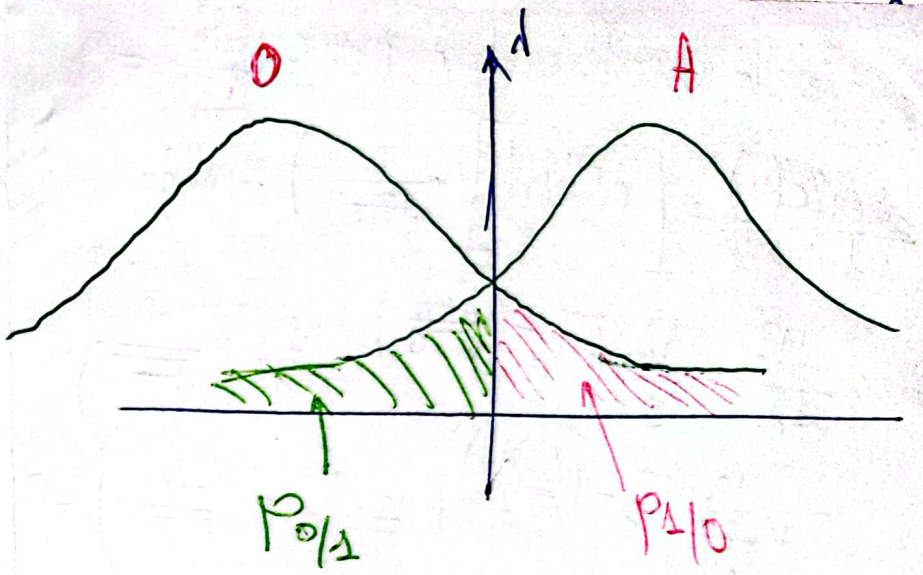
si $\frac{2E_b}{N_0} \uparrow \rightarrow Q \downarrow$

$x \uparrow$
$Q(x) \downarrow$

(~~pour~~) $E_b = A^2 T_b$

NRZ unipolaire





$P_e = P_0 P_{1/0} + P_1 P_{0/1}$

avec $P_{0/1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\left(\frac{x-A}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

$P_{1/0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{0}^{\lambda} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

changt de variable

$P_{1/0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx \quad \left(\beta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}, \ d\beta = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}}^{+\infty} e^{-\beta^2} d\beta$

$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)$

$$P_e = \frac{P_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{P_1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$\lambda_{opt} = ?$

$$\frac{dP_e}{d\lambda} = \frac{P_0}{2}\left[e^{-\left(\frac{\lambda}{2\sigma}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\right)\right]$$

$$+\frac{P_1}{2}\left[e^{-\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}\sigma}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\right] = 0$$

$$\frac{P_0}{2}\, e^{-\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} = P_1\, e^{-\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_1} = e^{\frac{-A^2+2A\lambda}{2\sigma^2}}$$

$$\text{Ln}\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = -\frac{A^2+2A\lambda}{2\sigma^2}$$

$$2\sigma^2\,\text{Ln}\left(\frac{P_0}{P_1}\right) = -A^2 + 2A\lambda$$

$$\lambda_{opt} = \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{A}\text{Ln}\left(\frac{P_0}{P_1}\right)$$

si $P_0 = P_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow \lambda_{opt} = \frac{A}{2}$

$$P_e = \frac{1}{4}\operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

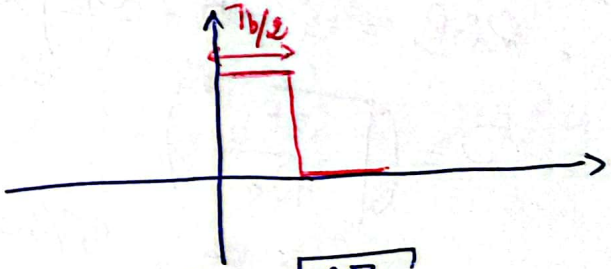
$$\hookrightarrow P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$E_b = P_b \times T_b = A^2 T_b \longrightarrow A = \sqrt{\frac{E_b}{T_b}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2T_b}}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

* RZ - $\frac{1}{2}$:



$$E_b = A^2\frac{T_b}{2} \longrightarrow A = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2T_b}}$$

$$\hookrightarrow P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Soit on

	P	
NRZ bipolaire	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$	1
NRZ unipolaire	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$	3
RZ $\frac{1}{2}$	$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	2
Manchester	$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$	1

EX :

Soit un signal NRZ bipolaire vaut 6,8 dB transmet à un canal AWGN. Calculer Pe (Hypothèse : équiprobable)

Rep :

- $RSB = 6{,}8\ dB = \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} \rightsquigarrow \frac{E_b}{N_0} = 10^{\frac{6{,}8}{10}}$
- $Q = \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
- $Pe = Q\left(\sqrt{2 \times 10^{6{,}8/10}}\right) = Q(3{,}09)$

↳ Tableau $Q(3{,}09) = 0{,}0009676$

↳ $Pe = 9{,}6\ 10^{-4} \approx 10^{-3}$

donc Pour 1000 bits Il y a un seul erreur

EX :

Soit un signal NRZ bipolaire vaut 6,8 dB transmet a un canal AWGN. Calculer P_e (hypothèse : équiprobable)

Rép :

$$RSB = 6,8\,dB = \frac{E_b}{N_0}$$

$$Q = \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 10^{6,8/10}$$

$$P_e = Q(2 \times 10^{6,8/10})$$

$X = 3,09$ → Tableau

$Q = 0,0009676$

$= 9,67.10^{-4}$

$\sim 10^{-3}$

$= \frac{1}{1000}$

c-à-d pour 1000 bits on a une seule erreur

(1)

* pour RZ-$\frac{1}{2}$:

- $\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} = \sqrt{10^{6,8/10}} = 2,18$
- $P_{e_{RZ-\frac{1}{2}}} = Q(2,18) = 0,0139$

$= 1,39.10^{-2}$

$\sim 2.10^{-2} = \frac{20}{1000}$

* pour NRZ-Unipolaire :

- $P_{e_{NRZ-Unipolaire}} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$

$= Q\left(\sqrt{\frac{10^{6,8/10}}{2}}\right) = Q(1,54) \sim 1,55$

$= 0,060 = 60.10^{-2}$

$= 6.10^{-2}$

$= \frac{60}{1000}$

Exercice 3:

Exercice 2:

Soit un signal NRZ-bipolaire définie par $\pm 1V$, transmis à travers un canal AWGN, dont la densité spectrale de bruit vaut 10^{-3} W/Hz.
Déterminer la valeur maximal de débit d'emission pour avoir une probabilité d'erreur $P_e \leq 10^{-3}$

Réponse : Dans le cas équiprobable

- $DSP_{bruit} = \frac{N_0}{2}$
- $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-3}$

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \geq Q^{-1}(10^{-3})$$

le petit valeur x inferieur à 0,001

d'après le tableau $\rightarrow x \geq 3,1$

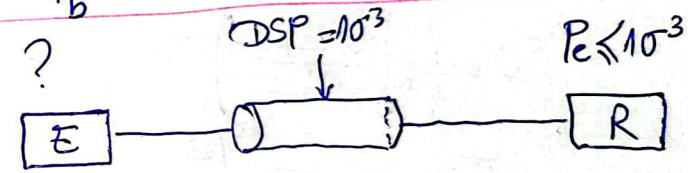
$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \geq 3,1$$

$$\sqrt{\frac{2A^2T_b}{N_0}} \geq 3,1$$

$$T_b \geq (3,1)^2 \frac{N_0}{2} \leftarrow DSP_{bruit}$$

$$T_b \geq 9,61 \cdot 10^{-3} s$$

$$D = \frac{1}{T_b} \leq 104,05 \text{ bit/s}$$



$D \leq 104,8$ bit/s

si $D = 104,8$ bit/s $\rightarrow P_e = 10^{-3}$

si $D \uparrow$ $P \uparrow$

Ce exercice on peut appliquer aussi

Exercice 3:

Soit un signal NRZ-bipolaire transmis à travers un canal AWGN, dont la densité spectrale de bruit vaut $2 \cdot 10^{-6}$ W/Hz. Le débit binaire vaut 56 kbit/s sachant que le signal reçu est atténué d'autre 3 dB. Calculer la puissance d'émission minimal requise (demandé) pour avoir un Pe égale à 10^{3}.

Réponse

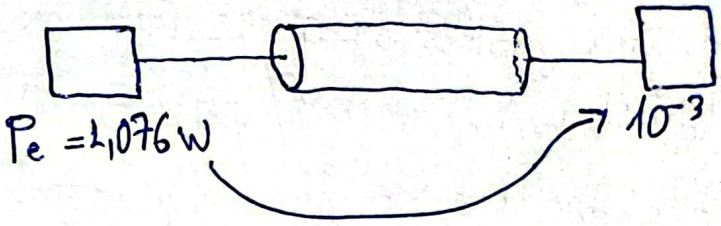
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-3}$$

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 3{,}1 \quad \text{(exercice précédent)}$$

$$\frac{2A^2T_b}{N_0} = (3{,}1)^2 \Rightarrow A^2 = (3{,}1)^2 \frac{N_0}{2T_b}$$

$$A^2 = (3{,}1)^2 \frac{N_0}{2} \times D$$

$$\boxed{P_e = A^2 = 1{,}076 \text{ W}}$$



PathLoss + shadowing + Doppler



$$P_{r\,dB} = P_{e\,dB} + (-3\,dB)$$

$$\hookrightarrow P_e \times \underbrace{10^{-3/10}}_{0{,}5\ (=1/2)}$$

-3dB c-à-d diminue le moitié (-50%)

$$P_e = \frac{1{,}076 \text{ W}}{\times 2} \longrightarrow 10^{-3}$$

Exercice4 :

Soit un signal NRZ bipolaire transmis à travers un canal AWGN, dont le rapport Signal/RSB vaut 6,8dB.

En considère que la source est non équiprobable et que $p_0 = \frac{2}{3}$ et le seuil optimal $\lambda_{opt} = 0,1\,A$ (Amplitude de signal)

$D = 1$ bit/s

Calculer P_e.

Réponse :

$$P_e = \frac{p_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) + \frac{p_1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)$$

$$= \frac{p_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1,1A}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) + \frac{p_1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{0,9A}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)$$

$$= p_0\, Q\left(\frac{1,1A}{\sigma}\right) + p_1\, Q\left(\frac{0,9A}{\sigma}\right)$$

avec. $E_b = A^2 \cdot T_b$; $T_b = \frac{1}{D} = 1\,s$

$= A^2$

. $\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_b} = \frac{N_0}{2}$; $\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$

$$P_e = \frac{2}{3}Q\left(1,1\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{3}\left(0,9\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}Q\left(1,1\sqrt{2\times 10^{\frac{6,8}{10}}}\right) + \frac{1}{3}Q\left(0,9\sqrt{2\times 10^{\frac{6,8}{10}}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}Q(3,14) + \frac{1}{3}Q(2,78)$$

$$= \frac{2}{3}Q(0,000338493) + \frac{1}{3}(0,0025551)$$

$$P_e = 1,08 \cdot 10^{-3}$$

en émission $\frac{E_b}{N_0} = RSB$

en Réception → Filtre de Réception → Rapport de sortie : $\frac{2E_b}{N_0} = RSB$ après le filtre Réception